3º μάθημα διαφορικές εξ   No.   Date 14/10/19

$a_2 y' + a_1 y = b_1$ Εξίσωση πρώτης τάξης

Συνθήκες $a_1(x) \neq 0 \ \forall x \in I$, $\alpha_1, \alpha_0, b \in G(I)$

κανονιας πράξεις προκύπτει $y' + py = q$

Λύση της εξίσωσης (Ε) στο Ι. καλείται μια συνάρτηση y συνεχώς παραγωγίσιμη στο Ι που ικανοποιεί την (Ε) $\forall x \in I$

<u>Θεώρημα</u> Θεωρώ την εξίσωση $y' + py = 0$, $x \in I$, $x_0 \in I$, $p \in G(I)$

α) όλες οι λύσεις της (E_0) δίνονται απο τον τύπο

$$y(x) = \underbrace{y(x_0)}_{c} e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}, \quad x \in I$$

b) Υπάρχει ακριβώς μια λύση $y(x_0) = y_0$, $y_0 \in \mathbb{R}$ που είναι η $y(x) = y(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}$, $x \in I$.

Να γίνουν οι αποδείξεις των δυο θεωρημάτων (άσκηση)

<u>Θεώρημα</u> Θεωρώ $y' + py = q$, $x \in I$, $x_0 \in I$, $p \in G(I)$

α) όλες οι λύσεις της $E(0)$ δίνονται απο τον τύπο

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds} \left[c + \int_{x_0}^{x} q(s) e^{\int_{x_0}^{u} p(u)du} \right], \quad x \in I$$

β) Υπάρχει ακριβώς μια λύση ~~επαληθεύει~~ $y(x_0) = y_0$, y_0 που είναι η

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds} \left[y(x_0) + \int_{x_0}^{x} q(s) e^{\int_{x_0}^{u} p(u)du} ds \right].$$

No. Date

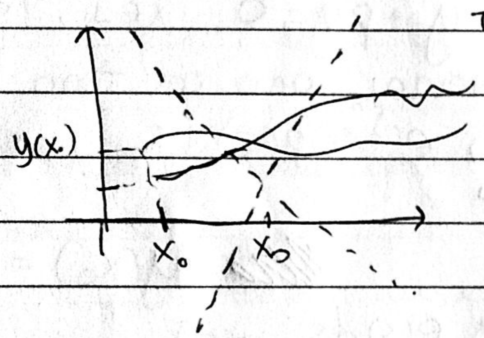
(E) $\alpha_1 y' + \alpha_0 y = b$ $\quad \alpha_1(x) \neq 0 \ \forall x \in I$, $\alpha_1, \alpha_0, b \in C(I)$.

$\underline{y' + p(y) = 0 \quad E(0)}$

Εφόσον $y(x_0) = 0$ $\quad \sim y(x) = y(x_0)\, e^{-\int_{x_i}^{x} p(s)\,ds}$

↳ μοναδική λύση του προβλήματος ~~το~~ η μηδενική

• $y' + py = b$ οι τροχιές των εξισώσεων δεν τέμνονται.



Το σχήμα είναι λάθος

(E) $\alpha_1 y' + \alpha_0 y = b$ $\quad \alpha_1(x) \neq 0 \ \forall x \in I$, $\alpha_1, \alpha_0, b \in C(I)$

↳ Παρατήρηση (Ασκ. 10 σελ. 57 γενικές ασκήσεις)

$(x^2 - 1)y' - 4xy = 0$

Ν.δ.ο

$$y(x) = \begin{cases} c_1 (x^2-1)^2, & x < -1 \\ c_2 (x^2-1), & -1 < x \leq 1 \\ c_3 (x^2-1), & 1 < x \end{cases}$$

Αν $y(1) = 2019$ τότε δεν υπάρχει τέτοια λύση.

Στα σημεία -1, 1 η εξίσωση είναι παραγωγίσιμη

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{y(x) - y_1(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{c_1 (x^2-1)^2}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} (x-1) = 0.$$

No. Date

$F(x,y,y')=0$ γενική μορφή.

$y'=f(x,y)$

Να βρειτε τη λύση $y(0)=f$.?
θα πρέπει να προσδιορισθεί το διάστημα.

Στο $(-1,1)$ έχει 1 λύση.

$$y(x)=\begin{cases} c_1(x^2-1)^2 &, -1<x \\ -f(x^2-1) &, -1<x<1 \\ c_3(x^2-1) &, x>1 \end{cases}$$

$y(0)=f$ στο $\mathbb{R}$ έχει άπειρες λύσεις.

Να λυθεί η εξίσωση $\boxed{x\in\mathbb{R}}$

$y'+by=\sin(ax)$, $a\neq 0$, $b\neq 0$ σταθερές

$$y(x)=e^{-\int b\,dx}\left[c+\int \sin(\alpha x)\cdot e^{\int bx}\,dx\right]$$

Αρκεί να βρούμε το ολοκλήρωμα.

- $\int \sin(\alpha x)\, e^{bx}\,dx$

$b>0$, $y(x)=c\cdot e^{-bx}+\frac{1}{a^2+b^2}\left[b\sin(\alpha x)-a\cos(\alpha x)\right]$ $x\in\mathbb{R}$

μας ενδιαφέρει το όριο:

$$(?)\ \lim_{+\infty}\left[\underbrace{b\sin(\alpha x)-\alpha\cos\alpha(x)}_{f(x)}\right]$$

Για να το λύσουμε θα χρειαστούμε ακολουθίες.

$X_\nu=\left(\nu\pi+\frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{a}$

$y_\nu=\left(2\nu\pi+\frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{a}$

$Z_\nu=\left((2\nu+1)\pi+\frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{a}$

- $\lim_{\infty} f(y_n)=b$
- $\lim f(y_n)=-b$

Παρατήρηση

$$a\sin(\lambda x)+b\cos(\lambda x) = a\left[\sin(\lambda x)+\underbrace{\frac{b}{a}}_{=\frac{\sin x_0}{\cos x_0}}\cos(\lambda x)\right]$$

$$= \frac{a}{\cos(x_0)}\left[\sin(\lambda x)\cos x_0 + \cos\lambda x \sin(x_0)\right]$$

Άσκηση 2 iii) σελ. 36

$$y'+y=\frac{1}{1+x^2}, \quad y(1)=2$$

Λύση

Συναρτήσεις συνεχείς:

$$y(x) = e^{-\int_1^x 1\,ds}\left[y(1)+\int_1^x \frac{1}{1+s^2}\cdot e^{\int_1^s 1\,du}\,ds\right]$$

$$= e^{-(x-1)}\left[2+\int_1^x \frac{1}{1+s^2}e^{s-1}\,ds\right].$$

(! Μας ενδιαφέρει πως συμπεριφέρεται στο $+\infty$.)

$$=2\cdot \underset{\downarrow 0}{e^{-x+1}} + e^{-(x-1)}\int_1^x \frac{e^{s-1}}{1+s^2}\,ds$$

$\boxed{x>1}$ $\quad \leq e^{-(x-1)}\int_1^x \frac{e^{x-1}}{1+s^2}\,ds = \int_1^x \frac{1}{1+s^2}\,ds < \frac{\pi}{2}$

Ασκήσεις

φυλλ. ασκ. 16+27. + αποδείξεις θεωρημάτων.

http://www.tanenghong.com

$\boxed{A\text{-}21}$ $y' + py = q \quad , p, q \in C([0,+\infty), \mathbb{R})$

Υποθ. ότι $\exists x_0 \geq 0, \mu > 0 : p(x) \geq \mu \ \forall x \geq x_0$

και $\lim\limits_{x\to\infty} q(x) = 0$

$\rightsquigarrow$ όλες οι λύσεις της (E) τείνουν προς το 0 στο $+\infty$.

Λύση:

Λύσεις: $y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}\left[y(x_0) + \int_{x_0}^{x} q(s) e^{\int_{x_0}^{s} p(u)du} ds\right], x \geq 0$

$A = y(x_0) e^{-\int_{x_1}^{x} p(s)ds} \quad , x \geq x_0$

Για $x \geq x_0$ είναι:

$\mu \leq p(s)$

$$\left.\begin{aligned} &\cdot \mu(x-x_0) \leq \int_{x_0}^{x} \mu ds \leq \int_{x_0}^{x} p(s)ds \\ &e^{-\mu(x-x_0)} \geq e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds} \geq 0. \\ &\underset{\downarrow 0}{e^{-\mu x}} e^{\mu x_0} = e \end{aligned}\right\} \lim_{+\infty} A(x) = 0$$

$B(x) = e^{-\int_{x_s}^{x} p(s)ds} \int_{x_0}^{x} q(s) e^{\int_{x_s}^{x} p(u)du} ds$

Παίρνουμε το όριο της απόλυτης (μόνο για το 0 μπορώ να το κάνω)

$|B(x)| \leq \left| e^{-\int_{x_s}^{x} p(s)ds} \right| \cdot \left| \int_{x_s}^{x} q(s) e^{\int_{x_s}^{x} p(u)du} ds \right|$

$\leq e^{-\int_{x_s}^{x} p(s)} \int_{x_s}^{x} |q(s)| e^{\int_{x_s}^{x} p(u)du} ds.$

No. Date

όπως προηγουμένως $\lim_{x\to\infty} e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds} = 0.$

(*) $|q(s)| \cdot e^{\int_{x_0}^{x} p(u)du}$ $\begin{cases} l \text{ μο. } l = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\int_{x_0}^{x} |q(s)| \cdot e^{\int_{x_0}^{x} p(u)du}}{e^{\int_{x_0}^{x} p(u)du}} = \end{cases}$

$\underset{\text{De'Hospital}}{\overset{\dots}{=}} \dfrac{|q(x)| \cancel{e^{\int_{x_0}^{x} p(u)du}}}{\cancel{e^{\int_{x_0}^{x} p(u)du}}\, p(x)} = |q(x)| \cdot \dfrac{1}{p(x)} \to 0.$

$0 < \dfrac{1}{p(u)} \leq \dfrac{1}{\mu}.$

! οι συναρτήσεις πρέπει να είναι συνεχείς για να ισχύει ο κανόνας De'Hospital

$y' + \underbrace{y\log\left(\frac{5}{2}+\sin x\right)}_{\hookrightarrow p(x).} = \underbrace{\dfrac{\cos x}{(x+1)^2}}_{g(x)}, \quad x \geq 0.$

$\cdot \ \dfrac{5}{2} + \underset{\downarrow\text{φραγμένο.}}{\sin x} \geq \dfrac{5}{2} - 1 = \dfrac{3}{2}.$

$\Rightarrow \log\left(\frac{5}{2}+\sin x\right) \geq \log\left(\frac{3}{2}\right) = \mu > 0.$